

『応用土木振動学』小テスト

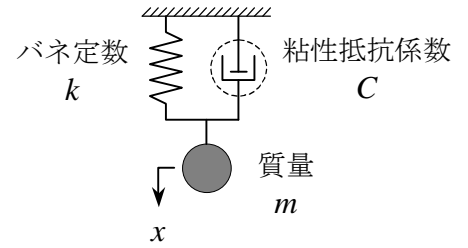
学籍番号	氏名	評点

【問題】右図に示すような“Kelvin Model”として表される 1 自由度系の減衰自由振動の運動方程式は、

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + C \frac{dx}{dt} + kx = 0 \text{ と表される。}$$

いま、 $m = 10 \text{ (Kg)}$, $C = 30 \text{ (N} \cdot \text{s/m)}$, $k = 30 \text{ (N/m)}$ とする。

また、初期条件として、 $t = 0$ のとき、 $x = \sqrt{3}$ かつ $\frac{dx}{dt} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ が与えられている。このとき、 $x = f(t)$ の式を求めよ。



【解答】

【解答】

減衰自由振動の運動方程式 $m \frac{d^2x}{dt^2} + C \frac{dx}{dt} + kx = 0$ に $m = 10$ (Kg), $C = 30$ (N·s/m), $k = 30$ (N/m) を代入すると、 $10 \frac{d^2x}{dt^2} + 30 \frac{dx}{dt} + 30x = 0$ となり、これを加速度項で正規化すると、 $\frac{d^2x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + 3x = 0$ となる。

いま、 $x = e^{\lambda t}$ とおくと、 $\frac{dx}{dt} = \lambda e^{\lambda t}$, $\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda^2 e^{\lambda t}$ であるから、 $\frac{d^2x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + 3x = 0$ は、 $(\lambda^2 + 3\lambda + 3)e^{\lambda t} = 0$

となる。ここで、 $e^{\lambda t} \neq 0$ であるから、 $\lambda^2 + 3\lambda + 3 = 0$ $\therefore \lambda = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 」 2点

よって、一般解は、 $x = e^{-\frac{3}{2}t} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right)$ 」 3点と表される。

初期条件より、 $t = 0$ のとき、 $x = \sqrt{3}$ だから、 $C_1 = \sqrt{3}$ $\therefore x = e^{-\frac{3}{2}t} \left(\sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right)$

また、 $\frac{dx}{dt} = -\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}t} \left(\sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + e^{-\frac{3}{2}t} \left\{ -\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \right\}$ で、

$t = 0$ のとき、 $\frac{dx}{dt} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ だから、 $-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ $\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 = 3\sqrt{3}$ $\therefore C_2 = 6$

したがって、 $x = e^{-\frac{3}{2}t} \left(\sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + 6 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right)$ 」 5点

なお、2つの関数の積の微分は、 $\frac{d}{dt} \{g(t) \times h(t)\} = \frac{d}{dt} \{g(t)\} \times h(t) + g(t) \times \frac{d}{dt} \{h(t)\}$ と表される。