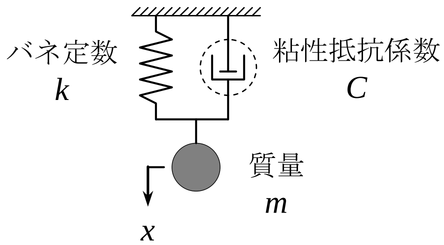
学籍番号	氏　　　名	評 点

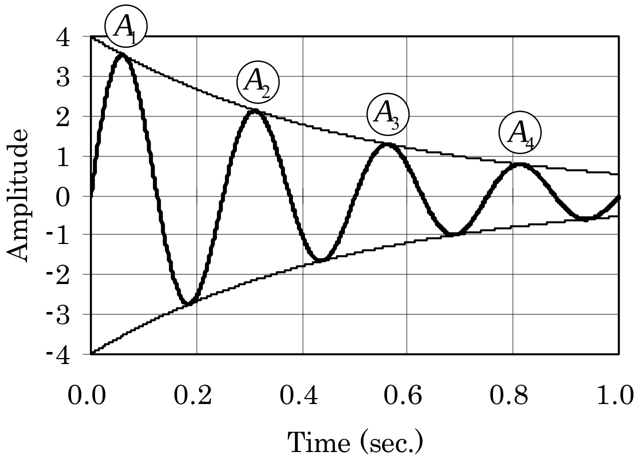
『応用土木振動学』小テスト

【問題】

右図に示すような〝Kelvin Model〟として表される系の減衰自由振動を観測したところ、下図(左)のような振動の時系列データが得られた。このとき、振動の時系列データから得られる固有周期 T, 固有周波数 f, 固有円振動数 ω はいくらか？

また、振動の〝山〟の位置 A_1 ～ A_4 の振幅を調べたところ、下表(右)のようなデータが得られた。このとき、この減衰自由振動の減衰定数 h はいくらか？





位置	振幅
A_1	3.516760
A_2	2.123094
A_3	1.284308
A_4	0.775346

【解答】

【解答】

1 秒間に 4 波長が観測されるので、固有周波数 $\boxed{f = 4\left(Hz\right)}$ である。

従って、固有円振動数 $\boxed{\omega = 2\pi f = 8\pi \cong 25.1327\left(radian/s\right)}$，固有周期 $\boxed{T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{4} = 0.25\left(\text{秒}\right)}$ である。

〝Kelvin Model〟として表される系の減衰自由振動は、次のように表される。

$$x = \exp\left(-\omega_0 ht\right)\cdot C\cos\left(\omega_1 t + \delta\right) \qquad \text{ここに、}\omega_0^2 = \frac{k}{m},\ \omega_1 = \omega_0\sqrt{1-h^2}\ \text{である。}$$

このとき、$t = t_n$ のとき、振動波形の n 番目の〝山〟があると考えると、

$\omega_1 t_n + \delta = 2n\pi$ すなわち、$t_n = \dfrac{2n\pi - \delta}{\omega_1}$ であるから、その振幅は次のようになる。

$$x_n = \exp\left(-\omega_0 ht_n\right)\cdot C\cos\left(\omega_1 t_n + \delta\right) = C\cdot\exp\left(-\omega_0 h\frac{2n\pi - \delta}{\omega_1}\right)$$

同様に、$t = t_{n+1}$ のとき、振動波形の $n+1$ 番目の〝山〟があると考えると、その振幅は次のようになる。

$$x_{n+1} = C\cdot\exp\left(-\omega_0 h\frac{2(n+1)\pi - \delta}{\omega_1}\right)$$

そこで、振幅の比をとると、次のようになる。

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{C\cdot\exp\left(-\omega_0 h\dfrac{2n\pi-\delta}{\omega_1}\right)}{C\cdot\exp\left(-\omega_0 h\dfrac{2(n+1)\pi-\delta}{\omega_1}\right)} = \exp\left\{-\omega_0 h\frac{2n\pi-\delta}{\omega_1} + \omega_0 h\frac{2(n+1)\pi-\delta}{\omega_1}\right\}$$

$$= \exp\left(\omega_0 h\frac{2\pi}{\omega_1}\right) = \exp\left(2\pi h\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)$$

ここで、$\omega_1 = \omega_0\sqrt{1-h^2}$ であるから、$\dfrac{\omega_0}{\omega_1} = \dfrac{1}{\sqrt{1-h^2}}$ の関係を用いると、次のようになる。

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \exp\left(2\pi h\frac{\omega_0}{\omega_1}\right) = \exp\left(2\pi\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}\right)$$

両辺の自然対数をとり、$h \ll 1$ と考えると、次のようになる。

$$\log_e\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = \frac{2\pi h}{\sqrt{1-h^2}} \cong 2\pi h \qquad \therefore h = \frac{1}{2\pi}\log_e\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$$

これを、振動の〝山〟の位置 $A_1 \sim A_4$ の振幅の表に当てはめて計算すると、

$$\frac{A_1}{A_2}:\ h = \frac{1}{2\pi}\log_e\left(\frac{3.516760}{2.123094}\right) \cong 0.08032$$

$$\frac{A_2}{A_3}:\ h = \frac{1}{2\pi}\log_e\left(\frac{2.123094}{1.284308}\right) \cong 0.08000 \qquad \therefore \boxed{h \cong 0.08}$$

$$\frac{A_3}{A_4}:\ h = \frac{1}{2\pi}\log_e\left(\frac{1.284308}{0.775346}\right) \cong 0.08032$$