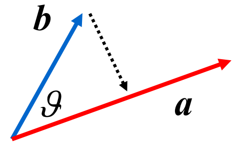
建設工学のための数学2

長岡技術科学大学
大塚　悟

内積：幾何学の基礎ルール

- 正値性：　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = a_1^{\,2} + a_2^{\,2} \ge 0$
- 対称性：　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$
- 線形性：　$(x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = x\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + y\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$
- 幾何学的意味

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\vartheta$$



ベクトルの投影との積

ベクトルのなす角度を求めるのに使用

記号の表記・その1

- 行列

スカラ：　a

ベクトル（1階の行列）：　$a_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$　$a_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

行列（2階）：　$A_{ij} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

記号の表記・その2

- ベクトルとテンソル

スカラ：　a

ベクトル（1階のテンソル）：　$\boldsymbol{a}$

$$\boldsymbol{a} = a_i\boxed{\boldsymbol{e}_i} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 = (\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

基底ベクトル

テンソル（2階）：　$\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A} = \boxed{\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j}\boxed{A_{ij}}$$

テンソルの成分

テンソル積

$$= \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 A_{11} + \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1 A_{21} + \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 A_{12} + \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2 A_{22}$$

基底ベクトル（正規直交基底）

- 長さ＝1

$$|\boldsymbol{e}_1| = 1 \quad |\boldsymbol{e}_2| = 1$$

- 直交性 （基底は互いに独立）

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0$$

- 一般的表現 （正規直交基底）

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \boxed{\delta_{ij}} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

クロネッカーのデルタ

テンソル積

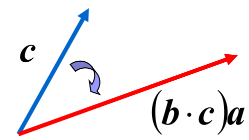
- テンソルとは

ベクトル $\boldsymbol{a}$ をベクトル $\boldsymbol{b}$ に変換する作用素

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{a}$$

- テンソル積の定義

$$(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$$



ベクトル $\boldsymbol{c}$ はベクトル $(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$ に変換されるため
テンソルと同様の働きをする.

指数表示ルール

- ダミー指標：
1つの項に同じ指標が2つ存在する場合には「重合」

$$\boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{e}_i = \sum_i a_i \boldsymbol{e}_i = a_1 \boldsymbol{e}_1 + a_2 \boldsymbol{e}_2 = a_k \boldsymbol{e}_k$$

ダミー指標は自由に選択可

- フリー指標：
1つの項に同じ指標が存在しない場合は「操作なし」

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = a_i \boldsymbol{e}_i = b_i \boldsymbol{e}_i + c_i \boldsymbol{e}_i = (b_i + c_i)\boldsymbol{e}_i$$

$$a_i = b_i + c_i$$

指数表示ルール・例

(A) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$: $\quad a_i = b_i \quad \because\ a_i \boldsymbol{e}_i = b_i \boldsymbol{e}_i$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

(B) $c = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$: $\quad c = a_i b_i$

$$\because\ c = (a_i \boldsymbol{e}_i) \cdot (b_j \boldsymbol{e}_j) = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i$$

$$c = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

(C) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}$: $\quad a_i = A_{ij} b_j$

$$\because\ \boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}$$

$$= (\boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k A_{jk})\boldsymbol{e}_m b_m = \delta_{km} A_{jk} b_m \boldsymbol{e}_j = A_{jm} b_m \boldsymbol{e}_j = A_{ij} b_j \boldsymbol{e}_i$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

演習問題

(A) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{b}$ を指数表示せよ

(B) $\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{y}$ を指数表示せよ

上式が任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対して成立する時,

$\boldsymbol{A}$ は対称テンソルである.（定義式）

(C) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{b}$ を指数表示せよ

(D) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$ を証明せよ

テンソルの種類

- 対称・反対称テンソル

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T \qquad \boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}^T$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & B_{12} \\ -B_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\underbrace{\boxed{\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T\right)}}_{（対称）}+\underbrace{\boxed{\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T\right)}}_{（反対称）}$$

- 単位テンソル

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\delta_{ij} \qquad \therefore\ \boldsymbol{I}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$$

- 直交テンソル（内積量を保存する変換）

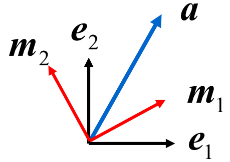
$$\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{T}=\boldsymbol{I} \qquad \because\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{T}\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{T}\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\left(\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{T}\boldsymbol{b}\right)$$

座標変換

- 基底ベクトルを回転（直交テンソル: $\boldsymbol{T}$ ）する

$$(\boldsymbol{m}_1 \quad \boldsymbol{m}_2)=(\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_2)$$

$$\mathbf{T}=\left(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j T_{ij}\right), \qquad T_{ij}=\underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} m_{11} \\ m_{12} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} m_{21} \\ m_{22} \end{matrix}} \end{bmatrix}}_{（座標変換行列）}$$



$$\because\ \boldsymbol{m}_1=\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_1=\left(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j T_{ij}\right)\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_i T_{ij}\delta_{j1}=\boldsymbol{e}_i T_{i1}=\boldsymbol{e}_i m_{1i}$$

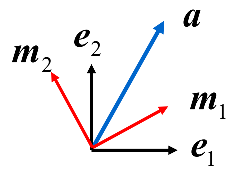
$$\boldsymbol{m}_i\cdot\boldsymbol{m}_j=(\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_i)\cdot(\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_j)=\boldsymbol{e}_i\cdot\left(\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_j\right)=\delta_{ij} \qquad \therefore\ \underbrace{\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{T}=\boldsymbol{I}}_{（直交テンソル）}$$

$$T_{ij}T_{ik}=\delta_{jk}$$

ベクトルの座標変換

- ベクトルを設定

$$\boldsymbol{a}=a_i\boldsymbol{e}_i$$



- 座標変換

$$\boldsymbol{a}=a'_i\,\boldsymbol{m}_i$$

- 成分間の関係

$$[T](a')=(a) \qquad または \qquad (a')=[T]^T(a)$$

$$\because\ \boldsymbol{a}=a'_i\,\boldsymbol{m}_i=a'_i\,\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_i=a'_i\left(\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k T_{jk}\right)\boldsymbol{e}_i=a'_i\,T_{ji}\boldsymbol{e}_j=a_j\boldsymbol{e}_j$$

テンソルの座標変換

- テンソルを設定

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{b} \qquad a_i = A_{ij}b_j$$

- 座標変換

$$(\boldsymbol{m}_1 \quad \boldsymbol{m}_2)=(\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_2)$$

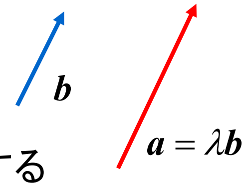
- 成分間の関係

$$[A]=[T][A'][T]^T$$

$$\because\ \boldsymbol{a}=a'_i\,\boldsymbol{m}_i=\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}=A'_{jk}\,b'_k\,\boldsymbol{m}_j$$

$$\therefore\ [T]^T(a)=[A'][T]^T(b) \Rightarrow (a)=[T][A'][T]^T(b)$$

テンソルの固有値と固有ベクトル



- 固有値と固有ベクトル

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{b}$$

特定のベクトル $\boldsymbol{b}$ を, $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ に変換する

$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=0$ ：固有方程式

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

座標の取り方によらない

$$\boxed{\lambda^3 - I_A\lambda^2 + II_A\lambda - III_A = 0}$$

3つの実数解と固有ベクトル

固有方程式

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

- 固有方程式 $\lambda^3 - I_A\lambda^2 + II_A\lambda - III_A = 0$ の展開

$$\left\{\begin{aligned}
I_A &= A_{11}+A_{22}+A_{33}=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \\
II_A &= \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2-(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2\right)=\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_2 \\
III_A &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{vmatrix}=\det\boldsymbol{A}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3
\end{aligned}\right.$$

固有値

不変量（第1・第2・第3）：座標変換に対して不変

固有方程式の活用

- 固有方程式

$$\lambda^3 - I_A\lambda^2 + II_A\lambda - III_A = 0$$

- ケーレー・ハミルトンの式

$$\boldsymbol{A}^3 - I_A\boldsymbol{A}^2 + II_A\boldsymbol{A} - III_A\boldsymbol{I} = 0$$

$\Rightarrow$ $f(\boldsymbol{A})=f(\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A},\boldsymbol{I})$ 高階のテンソル方程式

材料記述の基本的概念を提示

演習問題：固有値・固有ベクトル

- 次の行列の固有値を求めよ.

$$[A]=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

- 解：

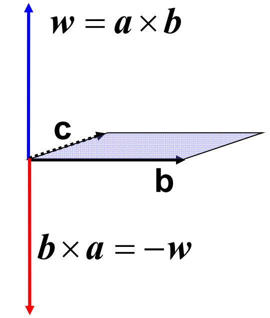
$$\lambda_1=1 \quad \boldsymbol{x}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \quad \& \quad \lambda_2=3 \quad \boldsymbol{x}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

- 行列表示

$$[D]=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad [T]=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$[D]=[T]^T[A][T]$$

外積：新しい次元の創出



- 定義： $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$
- 性質： $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

- 幾何学的意味

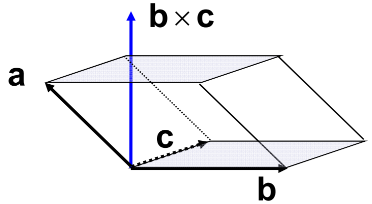
$$|\boldsymbol{w}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\vartheta$$

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の平面と直行方向のベクトル

スカラ三重積

- 定義： $[\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{c} \quad \boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{c} \quad \boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}]$
- 性質：
  - 交代性 $[\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{c}]=-[\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{c} \quad \boldsymbol{b}]$
  - 線形性 $[\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{c}]+t[\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{c}]$
  - 同じベクトルを含む場合 $[\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{c}]=0$
- 成分表記

$$[\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$



行列式

- 定義： $|\boldsymbol{A}|=\det\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1 \quad \ldots \quad \boldsymbol{a}_n]$

  N次の正方行列はN個のN次元ベクトルの集合体である. これらが作る並行多面体の正負を考慮した体積を行列式という.
- 公式
  - $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^T|$
  - $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$
  - $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{C}|$

行列の余因子

- 余因子 $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$

$$= A_{11}\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{21}\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{31}\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{vmatrix}$$

$$= A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + A_{31}a_{31}$$

- 試行

$$A_{12}a_{11} + A_{22}a_{21} + A_{32}a_{31} = \begin{vmatrix} A_{12} & A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13}a_{11} + A_{23}a_{21} + A_{33}a_{31} = 0$$

余因子と逆行列

- 余因子の性質

$$\boxed{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\boldsymbol{A}| & 0 & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{A}| & 0 \\ 0 & 0 & |\boldsymbol{A}| \end{bmatrix}$$

- 余因子の集合行列と逆行列

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{A}}^T}\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\hat{\boldsymbol{A}}^T$$

ベクトルの1次独立と1次従属

- 1次結合: $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + c_n\boldsymbol{a}_n$
- 1次独立:

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + c_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

上式が $c_i = 0$ の時に成立:1次独立

どれかの係数が $c_i \neq 0$ の時:1次従属

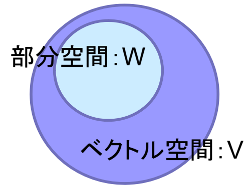
- 1次独立の必要十分条件

$\det(\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n) \neq 0$:1次独立

$\det(\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n) = 0$:1次従属

ランクと空間の次元

- ランク:行列の中の1次独立なベクトル数
- 次元: 空間の中の1次独立なベクトル数
- ベクトル空間:ベクトルの集合体 V の中の任意の要素 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ と任意な数 α , β に対して, $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ が元の集合 V に含まれる
- 部分空間:ベクトル空間(V)内に存在する閉じたベクトル空間(W)



ランクと空間の次元

- ランク：1次独立なベクトルの最大数

$$\boxed{\mathrm{rank}\boldsymbol{A} \le \min(m,n),} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & & A_{1n} \\ & \ddots & \\ A_{m1} & & A_{mn} \end{pmatrix}$$

- 定理：

ベクトルの集合から，可能な限り多くの1次独立なベクトルを選ぶ時に，その最大数は選び方によらずに一定である．

定理の証明

- 2つの方法によるr個とs個の独立なベクトルの集合
- ベクトル空間の性質

$$(\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_r) = (\boldsymbol{b}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}_s)\begin{pmatrix} A_{11} & & A_{r1} \\ & \ddots & \\ A_{1s} & & A_{rs} \end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{b}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}_s) = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_r)\begin{pmatrix} B_{11} & & B_{s1} \\ & \ddots & \\ B_{1r} & & B_{sr} \end{pmatrix}$$

上式より

$$\begin{pmatrix} B_{11} & & B_{s1} \\ & \ddots & \\ B_{1r} & & B_{sr} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & & A_{r1} \\ & \ddots & \\ A_{1s} & & A_{rs} \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}$$

$|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}| = 1$ より

$$\boxed{r = s}$$

核空間

- 斉次方程式の解は部分空間（核空間）を構成する

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(m,n)$$

- 証明

$$\boldsymbol{Ax}_1 = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{Ax}_2 = \boldsymbol{0}$$

任意の α，β に対して

$$\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{0}$$

斉次方程式の解の構造

- 斉次方程式：

$$\begin{pmatrix} A_{11} & & A_{1n} \\ & \ddots & \\ A_{m1} & & A_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 核空間：

$$N = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}, \ \boldsymbol{x} \in R^n\}$$

$$\boxed{\mathrm{rank}\boldsymbol{A} = r \le \min(m,n),} \quad \boxed{\mathrm{rank}N = n - r}$$

式の縮減

- 斉次方程式の縮減

$$\begin{pmatrix} A_{11} & & A_{1n} \\ & \ddots & \\ A_{r1} & & A_{rn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

斉次方程式の解の構造その2

- 式の変形：$\begin{pmatrix} A_{11} & & A_{1r} \\ & \ddots & \\ A_{r1} & & A_{rr} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1r+1} & & A_{1n} \\ & \ddots & \\ A_{rr+1} & & A_{rn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & & A_{1r} \\ & \ddots & \\ A_{r1} & & A_{rr} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A_{1r+1} & & A_{1n} \\ & \ddots & \\ A_{rr+1} & & A_{rn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- 基底解の仮定と解

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{基底解(n-r)個}} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \times \\ \vdots \\ \times \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \times \\ \vdots \\ \times \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

斉次方程式の解の構造その3

- 一般解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} \times \\ \vdots \\ \times \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_{n-r} \begin{pmatrix} \times \\ \vdots \\ \times \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

演習問題

- (1) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$
- (2) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$
- (3) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ 2x + 4y + 5z + 6w = 0 \end{cases}$

非斉次方程式の解の構造

- 解の存在条件

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \Rightarrow (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$$

$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ に対して1次従属の時に解が存在

$$\boxed{\mathrm{rank}[A \quad \boldsymbol{b}] = \mathrm{rank}[A]}$$

非斉次方程式の解の構造その2

- 一般解と特別解

$$Ax = b$$

$$x = x_s + x_n \quad \begin{cases} Ax_s = 0 & \text{（一般解：斉次方程式）} \\ Ax_n = b & \text{（特別解）} \end{cases}$$

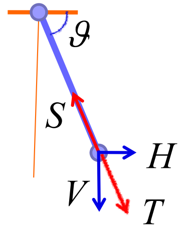
- 演習：

(1) $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+2y+3z+4w=4 \\ 2x+4y+5z+6w=7 \\ 4x+8y+11z+14w=15 \end{cases}$

トラス構造のつり合い式

- 鉛直・水平方向のつり合い式



$$\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} H \\ V \end{pmatrix}$$

解の存在条件

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} \cos\varphi & H \\ \sin\varphi & V \end{pmatrix} = 1$$

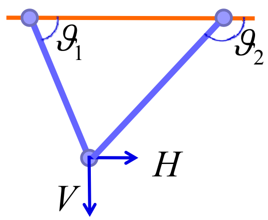
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} H \\ V \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S = T$$

不安定トラス（作用力によって自由に動く）

トラス構造のつり合い式その2

- トラスA:



つり合い式

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ V \end{pmatrix}$$

解の存在検討

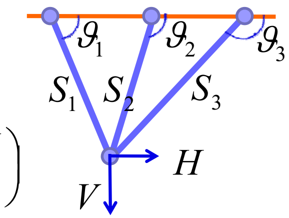
$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \cos\varphi_2 & H \\ \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 & V \end{pmatrix} = 2$$

解の決定

静定トラス（力のつり合い式のみで部材力が決まる）

トラス構造のつり合い式その3

- トラスB:



つり合い式

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \cos\varphi_2 & \cos\varphi_3 \\ \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 & \sin\varphi_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ V \end{pmatrix}$$

解の存在検討

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \cos\varphi_2 & \cos\varphi_3 \\ \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 & \sin\varphi_3 \end{pmatrix} = 2$$

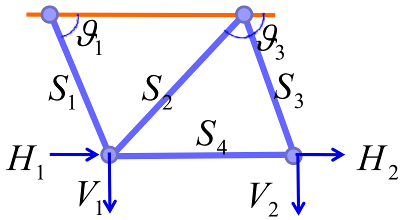
解が不定

外力＝0でも部材力発生

不静定トラス（力のつり合い式のみで部材力が決まらない）

トラス構造のつり合い式その4

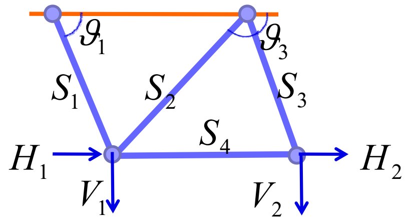
- トラスC:



TRY！：つり合い式を誘導せよ.

トラス構造のつり合い式その4

- トラスC:



つり合い式

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\cos\varphi_2 & 0 & -1 \\ \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi_3 & 1 \\ 0 & 0 & \sin\varphi_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 \\ V_1 \\ H_2 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

つり合い式（一般形式）

つり合い行列

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}$$

外力ベクトル

トラス構造のつり合い式その5

- 静定構造物:

$\boldsymbol{C}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}$ ：つり合い式

つり合い式で解が決まるため

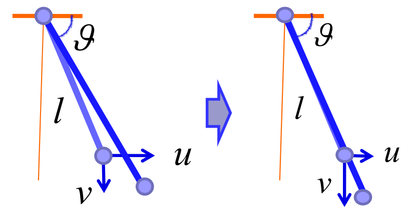
解の存在条件＆解の次元

$\mathrm{rank}[\boldsymbol{C}] = \mathrm{rank}[\boldsymbol{C} \quad \boldsymbol{F}] = m$ （部材数）

上式を満足する場合に構造物は『静定』である.

トラス構造の変形

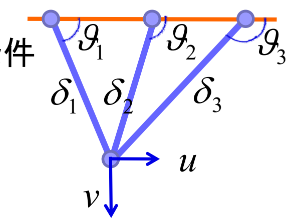
- 微小変形:



$$\delta = u\cos\varphi + v\sin\varphi$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

- 適合条件：変位が存在する「伸び」間の条件

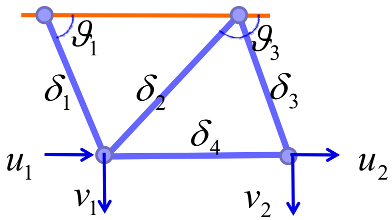


$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ \cos\theta_3 & \sin\theta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & \delta_1 \\ \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & \delta_1 \\ \cos\theta_3 & \sin\theta_3 & \delta_1 \end{pmatrix} = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & \delta_1 \\ \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & \delta_1 \\ \cos\theta_3 & \sin\theta_3 & \delta_1 \end{vmatrix} = 0$$

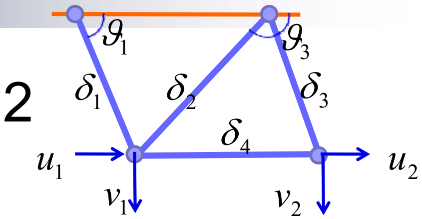
トラス構造の変形その2

- 変位と伸びの関係式:



TRY！：変位と伸びの関係式を誘導せよ.

トラス構造の変形その2



- 変位と伸びの関係式:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & 0 & 0 \\ -\cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi_3 & \sin\varphi_3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{pmatrix}$$

幾何行列 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\delta}$ 伸びベクトル

- ノート:

「力のつり合い式」と「変位と伸びの関係式」では

$\boxed{\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^T}$ が成立する. 常に成立する重要な関係式.

境界値問題の構造

- 支配方程式:

①力のつり合い式: $\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{s} = \boldsymbol{F}$

②変位と伸びの式: $\boldsymbol{B}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\delta}$

③構成式: $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\delta}$

- 解の構造:

つり合い式①を満足する$(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{F})$, 及び変位と伸びの式②を満足する $(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{U})$ は式の性質上, 無数通り存在する. 構成式は両者の橋渡しを行い, 解を唯一に決定する.

$$\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{s} = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{D}\boldsymbol{\delta} = \left(\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{K}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F}$$

変位が唯一求まる

仮想仕事の原理

- 仕事式

$$\boxed{\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{U}} = \left(\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{s}\right) \cdot \boldsymbol{U} = \boldsymbol{s} \cdot \left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}\right) = \boxed{\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\delta}}$$

- 仮想仕事式:

①力のつり合い式: $\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{s}_1 = \boldsymbol{F}_1$

②変位と伸びの式: $\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{\delta}_2$

①, ②を満足する任意の部材力, 伸びの掛け合わせ

$$\underbrace{\boxed{\boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{U}_2}}_{\text{仮想外力仕事}} = \left(\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{s}_1\right) \cdot \boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{s}_1 \cdot \left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_2\right) = \underbrace{\boxed{\boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{\delta}_2}}_{\text{仮想内力仕事}}$$

仮想変位の原理

- 概要:

$$\boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{\delta}_2$$ （仮想仕事式）

上式が変位と伸びの式を満足する任意の$(\boldsymbol{\delta}_2, \boldsymbol{U}_2)$に対して常に成立するとき，力のつり合い式 $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{s}_1$ に等しい.

- 証明:

$$\boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{U}_2 = \left(\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{s}_1\right) \cdot \boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{s}_1 \cdot \left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_2\right) = \boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{\delta}_2$$

従って，任意の $\boldsymbol{U}_2$ に対して上式が成立するとき，

$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{s}_1$$ （力のつり合い式）が成立する.

仮想荷重の原理

- 概要:

$$\boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{\delta}_2$$ （仮想仕事式）

上式が力のつり合い式を満足する任意の $(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{F}_1)$ に対して常に成立するとき，変位と伸びの式 $\delta_2 = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{U}_2$ に等しい.

- 証明:

$$\boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{U}_2 = \left(\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{s}_1\right) \cdot \boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{s}_1 \cdot \left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_2\right) = \boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{\delta}_2$$

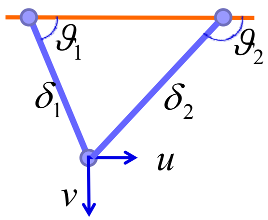
従って，任意の $\boldsymbol{s}_2$ に対して上式が成立するとき，

$$\delta_2 = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{U}_2$$ （力のつり合い式）が成立する.

応用例：静定トラス

- 問題:

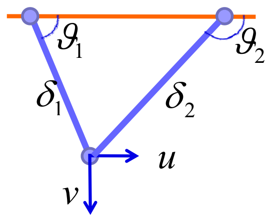
部材の伸び (δ_1, δ_2) が与えられる時の変位 (u, v)を求めよ.

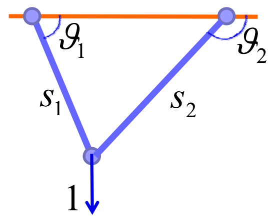


応用例：静定トラス

- 解答:

仮想荷重に対する部材力を (s_1, s_2) とする.





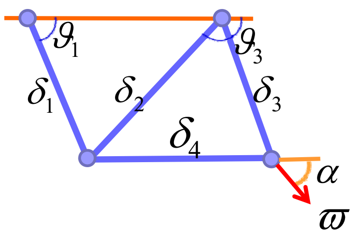
仮想仕事式より，

$$u \times 0 + v \times 1 = v = s_1 \times \delta_1 + s_2 \times \delta_2$$

応用例：不静定トラス

- 問題：

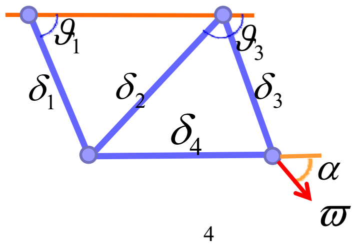
  部材の伸び $(\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4)$ が与えられる時に，図の変位 ϖ を求めよ．

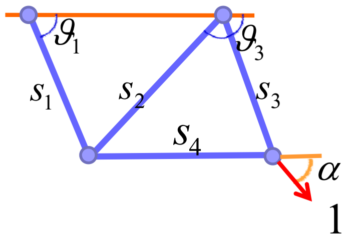


応用例：不静定トラス

- 解答：

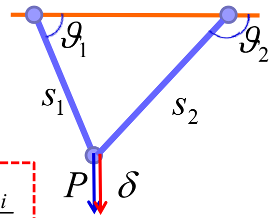
  単位荷重に対する任意の部材力 (s_1,s_2,s_3,s_4) を求めると，仮想仕事式より次式が得られる．





$$\varpi\times 1=\varpi=\sum_{i=1}^{4}s_i\times\delta_i$$

応用例：カスティリアーノの定理



- 問題（静定問題）：

  荷重に対する鉛直変位を求めよ．

- 解法：

  仮想の部材力は次の関係がある． $\boxed{\bar{s}_i=\dfrac{ds_i}{dP}}$

  仮想仕事式は　$v\times 1=\sum_{i=1}^{2}\bar{s}_i\delta_i$

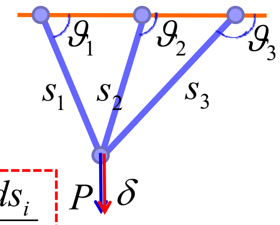
  構造体の伸びは部材力に対して $\delta_i=\dfrac{s_i l_i}{EA}$ である．

  よって，

$$v=\sum_{i=1}^{2}\frac{ds_i}{dP}\frac{s_i l_i}{EA}=\frac{d}{dP}\sum_{i=1}^{2}\frac{s_i^{\,2}l_i}{2EA}=\frac{dU}{dP}$$
（第1定理）

補ひずみエネルギー

応用例：カスティリアーノの定理その2



- 問題（不静定問題）：

  荷重に対する鉛直変位を求めよ．

- 解法（応力の算出）：

  仮想の部材力は次の関係がある． $\boxed{\bar{s}_i=\dfrac{ds_i}{dX}}$

  仮想仕事式は　$v\times 0=0=\sum_{i=1}^{3}\bar{s}_i\delta_i$

  不静定力：荷重ゼロと釣り合う

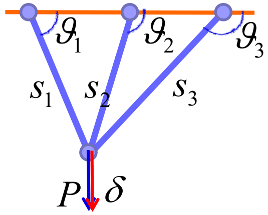
  構造体の伸びは部材力に対して $\delta_i=\dfrac{s_i l_i}{EA}$ である．

  よって，

$$0=\sum_{i=1}^{2}\frac{ds_i}{dX}\frac{s_i l_i}{EA}=\frac{d}{dX}\sum_{i=1}^{2}\frac{s_i^{\,2}l_i}{2EA}=\frac{dU}{dX}$$
（第2定理）

不静定力が求まる

応用例：追加説明1



- 解法（応力の算出）：

仮想の部材力は次の関係がある．

荷重ゼロと釣り合う不静定力

Pによる伸び（不静定力により未知）

仮想仕事式は　$v \times 0 = 0 = \sum_{i=1}^{3} \boxed{\bar{s}_i}\boxed{\delta_i}$

Pと釣り合う力（不静定力含む）

構造体の伸びは部材力に対して　$\delta_i = \frac{\boxed{s_i} l_i}{EA}$　である．

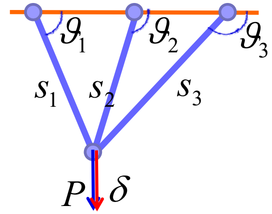
よって，

Pと釣り合う力（不静定力含む）により定義

$$0 = \sum_{i=1}^{2} \frac{ds_i}{dX}\frac{s_i l_i}{EA} = \frac{d}{dX}\sum_{i=1}^{2}\frac{\boxed{s_i}^2 l_i}{2EA} = \frac{dU}{dX}$$

（第2定理）

応用例：追加説明2



- 解法（応力の算出）：

つり合い式より

$$\begin{cases} s_1 = \dfrac{P-X}{\sqrt{2}} \\ s_2 = X \\ s_3 = \dfrac{P-X}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

荷重Pと釣り合う

$$\begin{cases} \bar{s}_1 = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \\ \bar{s}_2 = 1 \\ \bar{s}_3 = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

荷重ゼロと釣り合う

不静定力の関係式

$$\boxed{\bar{s}_i = \frac{ds_i}{dX}}$$

補ひずみエネルギー

$$\boxed{U = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i^2 l_i}{2EA}}$$

終りに（習得課題）

- ベクトル，テンソルの表記演算
- 固有値・固有ベクトルの算出
- 行列のランクの計算と連立方程式の解法
- トラス構造物の構造計算
- トラス構造物の仮想仕事の原理