

# 階層型構造格子を導入した 一般座標系における浅水流解析

新潟大学大学院自然科学研究科  
新潟大学災害・復興科学研究科  
新潟大学大学院自然科学研究科

学生会員  
正会員  
○学生会員

星野 剛  
安田 浩保  
中土 紘作

## 1. はじめに

河道形状の平面的な幾何学形状は流れに対して支配的な影響を及ぼすため、河道内を対象にした水理解析においては境界適合法が不可欠となる。現在、最も普及しているのは一般座標を導入した方法である。また、近年では洪水や津波に伴う氾濫解析のために河道と氾濫原を一体に扱うことが求められるようになってきており、解析対象の境界適合や計算コストの縮減などを目的として、非構造格子や階層型の格子構成である四分木構造格子による境界適合法が提案されている<sup>1)</sup>。このうち、四分木構造格子などのデカルト座標系における境界適合法は境界形状を階段状で表現するため、境界形状を滑らかに計算へ反映することは困難となり、境界近傍の流れを詳しく知りたい際にはふさわしい方法とは言えない。

本研究では、一般座標系の格子構成と四分木構造格子のような階層型構造格子の利点を組み合わせ、境界形状の忠実な反映と演算負荷の低減を両立した浅水流解析手法の構築を目的とし、一般座標を階層型の格子構成に拡張した柔軟かつ効率的な解析法を開発する。

## 2. 数値計算法

### (1) 支配方程式

支配方程式は2次元の浅水流方程式を対象とする。一般座標系への変換は細田ら<sup>4)</sup>と同様に流量フラックスをすべて一般座標反変成分とした下記の式を用いた。ただし、計算点の時間的な変動は考慮していない。数値計算における未知数は  $JQ^i, JQ^j, h$  の3変数のみとなる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{J} \left( \frac{\partial JQ^i}{\partial \xi} + \frac{\partial JQ^j}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial JQ^i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{(JQ^i)^2}{Jh} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{JQ^i JQ^j}{Jh} \right) \\ & + \frac{1}{Jh} \left( -(x_\xi JQ^i + x_\eta JQ^j) \left( JQ^i \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{y_\eta}{J} \right) + JQ^j \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{y_\eta}{J} \right) \right) \right. \\ & \quad \left. + (y_\xi JQ^i + y_\eta JQ^j) \left( JQ^i \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{x_\eta}{J} \right) + JQ^j \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{x_\eta}{J} \right) \right) \right) \\ & + \frac{gh}{J} \left( (x_\eta^2 + y_\eta^2) \frac{\partial(z+h)}{\partial \xi} - (x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta) \frac{\partial(z+h)}{\partial \eta} \right) \\ & \quad + J \frac{\tau_{bi}}{\rho} = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial JQ^j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{JQ^i JQ^j}{Jh} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{(JQ^j)^2}{Jh} \right) \\ & + \frac{1}{Jh} \left( (x_\xi JQ^i + x_\eta JQ^j) \left( JQ^i \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{y_\xi}{J} \right) + JQ^j \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{y_\xi}{J} \right) \right) \right. \end{aligned}$$

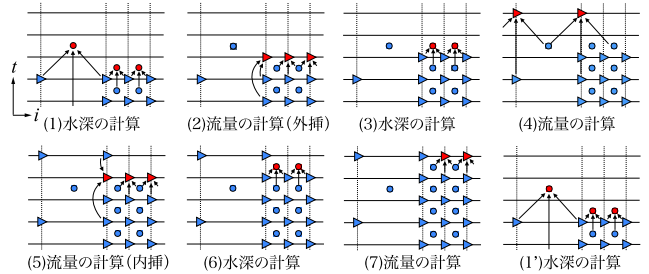


図-1 接続部の時間発展差分法 (三角は流量フラックス, 丸は水深の計算点, 矢印は未知数の導出に用いる計算点を表している。それぞれ時間ステップにおける既知数を青, 求める未知数を赤で示している。差分計算は(1)から(7)の順に行い, (7)の次は(1)に戻り, 繰り返し計算することで時間を進展させる。通常の Leap-Frog 法と異なるのは(2),(5)での接続部での計算であり, そこでは支配方程式から未知数を求めず, 時間方向の補間を用いることで算出する。)

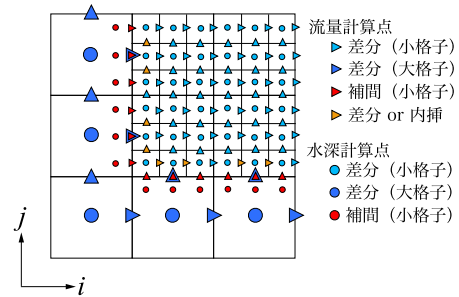


図-2 接続部の空間差分法 (計算順序は大格子の流量フラックスを同一辺上の小格子の流量フラックスに線形補間で重み付けをし, 受け渡す。橙色で示した計算点は風上側が小格子であれば差分計算, 大格子であれば内挿により算出する。)

$$\begin{aligned} & - (y_\xi JQ^i + y_\eta JQ^j) \left( JQ^i \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{x_\xi}{J} \right) + JQ^j \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{x_\xi}{J} \right) \right) \\ & + \frac{gh}{J} \left( -(y_\xi y_\eta + x_\xi x_\eta) \frac{\partial(z+h)}{\partial \xi} + (x_\xi^2 + y_\xi^2) \frac{\partial(z+h)}{\partial \eta} \right) \\ & \quad + J \frac{\tau_{bj}}{\rho} = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

### (2) 差分解法

差分解法は接続部以外では Leap-Frog 法を用い, 異なる格子間隔の接続部は後藤ら<sup>2)</sup>と同様に時空間での補間を用いた。この方法の利点は格子間隔を 1:3 (以下小格子, 大格子) で接続させることで大格子の水深計算点と小格子の水深計算点を空間的に一致させることが可能な点にある。接続部の時間方向の計算点配置を図-1に, 空間方向の計算点配置を図-2に示す。また式(1),(2),(3)中のメトリックスの空間微分は中央差分で計算した。

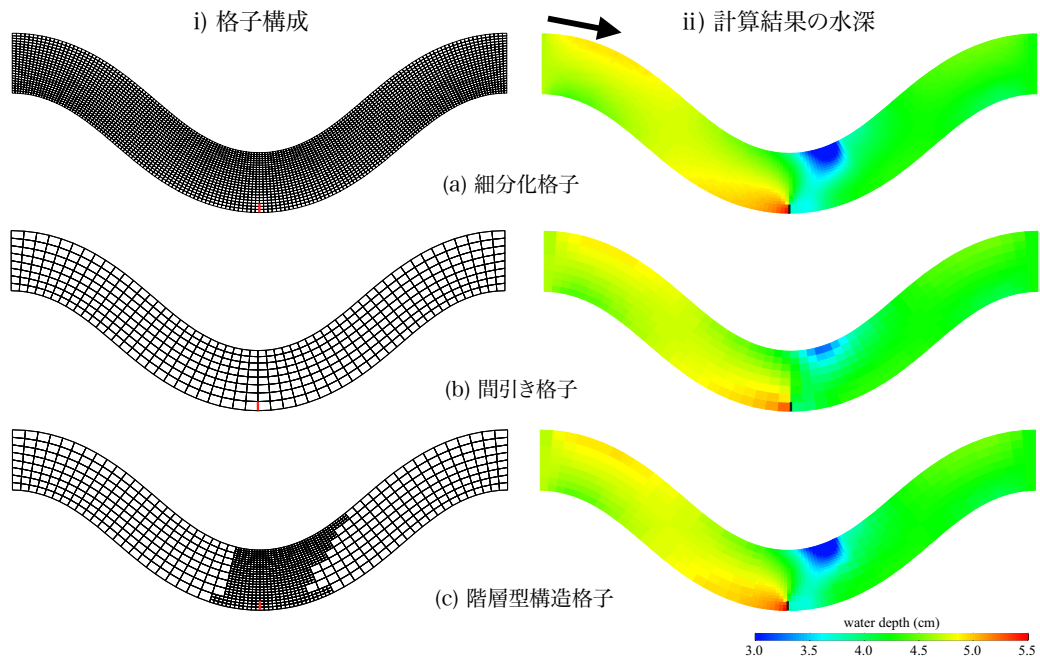


図-3 数値実験によるモデルの適用性の把握

### 3. 水制周りの流れに対する適用性の検証

一般座標における階層型格子は、境界近傍の流れが精度良く計算出来ることから、境界近傍の流れの変化率の大きな問題に対して有効であると考えられる。該当する事例の一つに水制周りの流れが挙げられる。本研究では、蛇行水路の曲頂に水制を模擬した不透過線状構造物を配置した計算を行い、階層型構造格子の適用性について調べた。

#### (1) 計算格子

計算格子には全体を細分化した格子(流下方向162分割, 横断方向24分割), 縦横断ともに計算点数を1/3に間引いた格子(流下方向54分割, 横断方向8分割), 局所的に細分化箇所を残した階層型構造格子の3種類を用いた。各計算格子を図-3(i)に示す。なお、図-3(i)の赤線部が水制と見立てた不透過箇所である。

#### (2) 計算結果

数値実験により得られた水深コンターを図-3(ii)に、縦断水深図を図-4に示す。

##### a) 細分化格子

細分化格子においては蛇行部曲頂部での水制の設置により水面が堰上げられており、水深の増大が見られる。また、水制の通過後には水深が急激に低下していることも分かる。細分化格子の計算結果を基準とし、他の計算格子についても議論する。

##### b) 間引き格子

間引き格子では、(a)で確認されたような鋭い水深の変化が見られず、解が鈍ることが確認される。このような誤差は水制周りの河床変動などを扱う際には、その影響が大きく顕在化することが予想される。

##### c) 階層型構造格子

階層型構造格子では、(a)と同様の水深分布が得られた。また空間的な計算点数は(a)3888(b)432(c)1072と

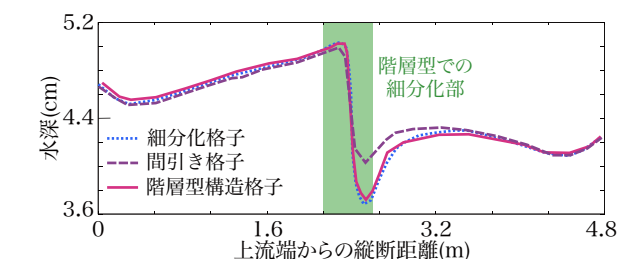


図-4 計算結果の縦断水深(右岸から9.4cm)

なっており、(c)では(a)の1/3以下の計算点となり、時間方向の計算点数も考慮すると10倍程度高速に演算が可能となる。この結果より、本研究で提案する一般座標階層型格子の数値計算法が打ち切り誤差を抑制しつつ、計算負荷の低減が図れる有効な手法となることが示された。

### 4. おわりに

一般座標系における階層型格子の浅水流方程式の解析手法を確立した。本解析手法が有する効率性は、河道と氾濫原を一体的に扱う氾濫計算、構造物や中規模河床波などの河道内起伏を反映させた水理解析において見込める。

#### 参考文献

- 1) 星野剛, 西家健宏, 小関 博司, 安田 浩保: 解析コストの効率化を目的とした河道・氾濫原一体型解析法の提案, 土木学会河川技術論文集, 第19巻, pp.331-336, 2013.
- 2) 後藤智明, 小川由信: Leap-Frog法を用いた津波の数値計算法, 東北大学工学部土木工学科資料, 1982.
- 3) 星野剛, 安田浩保: 自然河川の水理解析における一般座標格子が有する打ち切り誤差の理論的評価とその緩和手法, 土木学会応用力学論文集, 第16巻, pp.I 573-I 582, 2013.
- 4) 細田尚, 長田信寿, 村本嘉雄: 移動一般座標による開水路非定常流の数値解析, 土木学会論文集, 第533号/II-34, pp.267-272, 1996.